SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Sergio Polidoro

IL PROBLEMA DELLA DETERMINAZIONE DEL PREZZO DI OPZIONI DI TIPO ASIATICO

8 luglio 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Sunto Viene brevemente descritta la teoria di Black & Scholes che nel 1973 hanno considerato il problema della determinazione del prezzo di opzioni di tipo europeo. Tale procedimento viene successivamente applicato alle opzioni asiatiche; in questo caso il problema si formalizza in un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di tipo parabolico degenere, per il quale vengono presentati alcuni risultati di esistenza, unicità ed approssimazione numerica.

Abstract We briefly recall the basic ideas of the work by Black & Scholes that considered the problem of the pricing of an european option. We next show that, when we apply the same technique to some asian options, we find a Cauchy problem for a degenerate parabolic partial differential equation. We present some existence and regularity results for such a Cauchy problem and some finite difference schemes for its numerical solution.

1 Introduzione

Presenterò alcuni problemi che hanno origine in Matematica Finanziaria, che mi sono stati proposti da Emilio Barucci e Vincenzo Vespri ed hanno dato origine ad una collaborazione di cui esporrò i primi risultati. Vorrei anche ricordare che le prime questioni di tipo modellistico e probabilistico sono state approfondite nel corso della preparazione della Tesi di Laurea di Benedetta Santarelli.

I problemi che abbiamo considerato consistono nello stabilire un prezzo equo per le opzioni, che sono contratti che assicurano al possessore il diritto di acquistare (o vendere) in futuro un determinato pacchetto di titoli ad un prezzo concordato.

Prima di parlare più dettagliatamente di questo tipo di prodotti finanziari vorrei fare alcune osservazioni. Innanzitutto il possesso di un'opzione non corrisponde ad una effettiva ricchezza, ma solamente ad una opportunità futura. Nonostante ciò, le opzioni sono titoli attualmente molto trattati: infatti la Chicago Broad Options Exchange, pur trattando solo opzioni, è tra le più i mportanti borse del mondo ed è seconda solamente alla New York Stock Excange.

Una prima, fondamentale, risposta al problema della valutazione del prezzo di un particolare tipo di opzione è stata fornita nel 1973 da Black e Scholes [4]; altri risultati in questa direzione sono dovuti a Merton, con un metodo che si è rivelato applicabile ad un'ampia classe di problemi finanziari. Questi studi hanno avuto un'enorme ricaduta: da un lato i criteri oggettivi per la valutazione di titoli rischiosi ha contribuito ad accrescere i mercati, da un altro lato si è sviluppato un ampio campo di ricerca di matematica applicata all'economia. L'importanza di tale ricaduta è testimoniata dal fatto che nel 1997 è stato assegnato a Scholes e Merton il premio Nobel per l'Economia. Il merito principale di questa teoria è stato tuttavia riconosciuto a Black, deceduto nel 1995.

Nel seguito di questa introduzione descriverò brevemente l'analisi di Black e Scholes, che riguarda le opzioni dette "di tipo europeo", nel paragrafo successivo verranno considerate le opzioni di tipo asiatico, che costituiscono una variante di quelle europee. Nei due paragrafi successivi verrano studiati i problemi matematici legati a questi ultimi titoli.

Nel lavoro di Black & Scholes [4] viene considerato il problema della valutazione di un'opzione europea di tipo "call". Si tratta di un contratto che assicura il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare in una certa data T e ad un prezzo concordato E un pacchetto di azioni il cui valore verrà indicato con $S(t)$.

Si assume che S sia descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica

$$dS = S\sigma dW + S\mu dt \tag{1.1}$$

dove σ e μ sono fissate costanti positive e W è un processo di Wiener.

Il valore dell'opzione, che verrà nel seguito indicato con V, è perfettamente noto all'istante $t = T$, quando sarà noto il valore del pacchetto $S(T)$, ed è chiaramente

$$V(T, S(T)) = \max\{S(T) - E, 0\}. \tag{1.2}$$

Black & Scholes hanno proposto un metodo per ricostruire il valore $V(t,S)$ per i tempi precedenti $t < T$, basato oltre che sulla teoria stocastica, anche sulla cosiddetta "condizione di non arbitraggio", che è un principio secondo il quale il mercato non offre agli investitori l'opportunità di ottenere un profitto immediato da certe operazioni non rischiose.

Se si considera V come funzione delle due variabili indipendenti (t,S) allora, per il lemma di Itô, deve risultare

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt. \tag{1.3}$$

Sarebbe opportuno eliminare la componente aleatoria del processo stocastico. A tal fine si costruisce un "portafoglio" costituito da una quantità di opzioni, dal valore V, e da una quantità Δ di azioni dal valore S. Indicheremo con $\Pi = V - \Delta S$ il valore di tale portafoglio. Qui si introduce una nuova ipotesi, di carattere modellistico: si suppone che Δ possa variare nel tempo, ma che il suo differenziale stocastico dia un contributo trascurabile. Pertanto si avrà

$$d\Pi = dV - \Delta dS,$$

ossia, utilizzando le formule (1.1) e (1.3)

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW + \left(\mu S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt. \tag{1.4}$$

Se scegliamo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \tag{1.5}$$

otteniamo l'equazione "deterministica"

$$d\Pi = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt.$$

Se ora pensiamo di investire lo stesso capitale in azioni non rischiose otteniamo

$$d\Pi = r\Pi dt$$

(qui r indica il tasso di interesse del titolo non rischioso), per il principio di non arbitraggio questi due ultimi investimenti devono fornire lo stesso rendimento, di conseguenza si ottiene l'equazione di Black & Scholes

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{1.6}$$

In questo modo il problema della valutazione di un'opzione di tipo europeo è stato trasformato in un'equazione alle derivate parziali di tipo parabolico *retrogrado* (1.6), che appare degenere per la presenza del coefficiente S^2 che

moltiplica la derivata $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, a cui è associata la condizione *finale* (1.2). Osserviamo che il problema appena descritto è equivalente al più familiare problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{per } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,T[, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.7}$$

come si verifica effettunado il cambiamento di variabile $x = \log(S)$ e qualche aggiustamento secondario e ponendo

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{2r-\sigma^2}{2\sqrt{2}\sigma}x + \frac{4r^2+4\sigma^2 r+\sigma^4}{8\sigma^2}T\right)\max\left\{\exp\left(\frac{\sigma x}{\sqrt{2}}\right) - E, 0\right\}.$$

Per questa scelta del dato è addirittura possibile scrivere esplicitamente la soluzione di (1.7) per mezzo di una espressione che viene correntemente detta formula di Black & Scholes.

2 Opzioni di tipo asiatico

Le opzioni europee costituiscono il più semplice tipo di opzioni trattate; in effetti esistono innumerevoli tipi di contratti di questo genere, ognuno dei quali dà origine a problemi matematici completamente diversi.

Ad esempio, le opzioni "americane", che costituiscono l'80 % di tutte le opzioni trattate, si caratterizzano semplicemente per il fatto che il possessore può esercitare il diritto a vendere (o ad acquistare) il pacchetto in un momento qualsiasi $t \in [0,T]$ e non necessariamente alla scadenza ($t = T$) e danno origine ad un problema parabolico con frontiera libera.

Le opzioni di tipo asiatico si differenziano da quelle di tipo europeo per il fatto che il loro valore al tempo $t = T$ dipende non solamente da $S(T)$, ma anche dalla sua media calcolata sull'intervallo $[0,T]$, come risulta dai seguenti esempi:

$$V(T,S(T)) = \max\left\{S(T) - \frac{1}{T}\int_0^t S(\tau)d\tau, 0\right\}; \tag{2.1}$$

$$V(T,S(T)) = \max\left\{\frac{1}{T}\int_0^t S(\tau)d\tau - E, 0\right\}; \tag{2.2}$$

$$V(T,S(T)) = \max\left\{S(T) - \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^t \log(S(\tau))d\tau\right), 0\right\}; \tag{2.3}$$

$$V(T,S(T)) = \max\left\{\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^t \log(S(\tau))d\tau\right) - E, 0\right\}. \tag{2.4}$$

Osserviamo che i processi stocastici che descrivono il valore di queste opzioni presentano caratteristiche non markoviane, è pertanto opportuno introdurre una nuova variabile A che tenga conto della storia del sitema e considerare V come funzione delle tre variabili *indipendenti* (t, S, A). Negli esempi (2.1) e (2.2) appena visti è naturale scegliere

$$A(t) = \int_0^t S(\tau)d\tau,$$

negli esempi (2.3) e (2.4) invece

$$A(t) = \int_0^t \log(S(\tau))d\tau.$$

Procedendo sostanzialmente come nel caso delle opzioni di tipo europeo si ottiene che V deve verificare la seguente equazione differenziale

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \log(S)\frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{2.5}$$

nel caso della *media aritmetica*,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S\frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{2.6}$$

nel caso della *media geometrica*.

Il prezzo dell'opzione risulta pertanto determinato dall'equazione differenziale (2.5) (oppure (2.6)) e da una delle condizioni finali precedentemente elencate.

Solamente in alcuni casi particolari (più precisamente quando si considera il dato finale (2.3)) è nota un'espressione esplicita per la soluzione del problema sopra descritto; nel caso della media aritmetica, che corrisponde alle opzioni effettivamente trattate nei mercati, le cose diventano considerevolmente più difficili. Ricordo che, sotto opportune condizioni, si è cercato di approssimare la densità di probabilità del processo stocastico corrispondente all'equazione (2.5) con la densità corrispondente alla (2.6), controllando l'errore per mezzo della conoscenza dei suoi momenti.

Quando si considera direttamente l'equazione (2.5) non si conosce un'espressione esplicita per la soluzione del corrispondente problema di Cauchy e si è costretti a ricorrere a metodi numerici, che possono mirare a simulare il processo stocastico (come ad esempio nei lavori di Kemna e Vorst [8], di Ruttiens [15] e di Caverhill e Clewlow [5]), oppure possono essere basati sull'approssimazione numerica della soluzione del problema di Cauchy (si vedano i lavori di Barraquand e Pudet [3], Barles, Daher e Romano [2], Wilmott, Dewynne ed Howison [17], Dewynne e Wilmott [6], Rogers e Shi [14]). Nel nostro lavoro abbiamo scelto quest'ultima strada, cercando dapprima di ottenere risultati di esistenza, unicità e regolarità per le soluzioni del problema di Cauchy, per poi costruire metodi di approssimazione numerica alle differenze finite.

3 Media geometrica

Consideriamo dapprima il caso della media geometrica.

Se poniamo $x = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\log(S), y = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}A$ e

$$u(x,y,t) = e^{\frac{2r-\sigma^2}{2\sqrt{2}\sigma}x+\left(\frac{2r+\sigma^2}{2\sqrt{2}\sigma}\right)^2 t} V\left(T-t, e^{\frac{\sigma x}{\sqrt{2}}}, \frac{\sigma y}{\sqrt{2}}\right),$$

allora l'equazione (2.6) risulta equivalente all'equazione considerata da Kolmogorov in [16, pag.167]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.1}$$

che costituisce il prototipo della classe di operatori studiata in [9] dall'autore e da Lanconelli, mentre le condizioni *finali* (2.3) e (2.4) si trasformano nelle condizioni *iniziali*

$$u(x,y,0) = e^{\frac{2r-\sigma^2}{2\sqrt{2}\sigma}x}\max\left\{e^{\frac{\sigma x}{\sqrt{2}}} - e^{\frac{\sigma y}{\sqrt{2T}}}, 0\right\} \tag{3.2}$$

e

$$u(x,y,0) = e^{\frac{2r-\sigma^2}{2\sqrt{2}\sigma}x}\max\left\{e^{\frac{\sigma y}{\sqrt{2T}}} - E, 0\right\}. \tag{3.3}$$

Ricordiamo alcuni risultati noti per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}, & \text{per } (x,y,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times]0,T[, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y) & \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Innanzitutto la funzione

$$\Gamma(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi(t-\tau)^2}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} - \frac{3}{(t-\tau)^3}\left(y-\eta-\frac{t-\tau}{2}(x+\xi)\right)^2\right) \tag{3.5}$$

per $t > \tau, \Gamma(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = 0$ per $t \le \tau$, è una soluzione fondamentale di (3.1), quindi, se φ è una funzione continua su $\mathbb{R}^2$ e tale che

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-c(x^2+y^2)}\varphi(x,y)\, dx\, dy < \infty,$$

per una costante arbitraria c, allora la funzione u definita da

$$u(x,y,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(x,y,t;\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{3.6}$$

è soluzione del problema di Cauchy (3.4). Vale inoltre il seguente risultato di unicità: se u e v sono due soluzioni di (3.4) e verificano la seguente condizione

$$\int_{S_T} e^{-c(x^2+y^2)}|u(x,y,t) - v(x,y,t)|\, dx\, dy\, dt < \infty,$$

per una costante arbitraria c, allora $u \equiv v$ (si veda [12]).

I risultati sopra enunciati si possono estendere al caso in cui i coefficienti σ ed r sono funzioni limitate e localmente hölderiane della variabile t, con σ strettamente positiva. Se infatti R indica una primitiva di r e se poniamo

$$u(x,y,t) = e^{R(t)}V(T-t, e^x, y),$$

allora l'equazione differenziale (2.6) risulta equivalente alla

$$\frac{\sigma(t)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(r(t) - \frac{\sigma(t)^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.7}$$

che rientra tra quelle studiate in [11]. Naturalmente nella formula (3.6) si deve sostituire la funzione Γ con la soluzione fondamentale dell'equazione (3.7).

Per quanto riguarda l'approssimazione numerica della soluzione di (3.4) possiamo adattare alcuni risultati di [13], dove è stato studiato un problema di valori al contorno per un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$. Definiamo l'operatore "discreto"

$$L_G u\,(x,y,t) = -\frac{u(x,y,t) - u(x, y+\delta x, t-\delta)}{\delta} + \\ \frac{u(x-h, y+\delta x, t-\delta) - 2u(x, y+\delta x, t-\delta) + u(x+h, y+\delta x, t-\delta)}{h^2},$$

che approssima l'operatore L nel senso che soddisfa alla seguente condizione

$$L_G u = Lu + (h^2+\delta)O(h,\delta)$$

(qui $O(h,\delta)$ indica una funzione limitata). L'operatore L_G risulta ben definito sulla griglia

$$G = \left\{(j\Delta_x, k\Delta_y, n\Delta_t) \in \mathbb{R}^3 : j,k,n \in \mathbb{Z}\right\},$$

con $\Delta_x = h, \Delta_t = \delta$ e $\Delta_y = h\delta$ e vale il seguente Teorema di approssimazione:

TEOREMA 3.1 *Sia u soluzione di (3.4), u_G soluzione di $L_G u_G = 0$ in $G \cap \mathcal{S}_T, u_G = \varphi$ in $G \cap \{t=0\}$. Allora, per ogni $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ e per ogni compatto H di $\overline{\mathcal{S}_T}$ esiste una griglia G, verificante la seguente condizione di stabilità*

$$\frac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2} \le \frac{1}{2},$$

tale che

$$\max_{(x,y,t)\in G\cap H} |u(x,y,t) - u_G(x,y,t)| \le \varepsilon_1,$$

$$\max_{(x,y,t)\in G\cap H} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) - \frac{u_G(x+\Delta_x, y, t) - u_G(x,y,t)}{\Delta_x}\right| \le \varepsilon_2.$$

Risulta inoltre $\varepsilon_1 = O((\Delta_x)^2)$ ed $\varepsilon_2 = O(\Delta_x)$.

Osserviamo che il metodo fornisce anche un'approssimazione della quantità Δ definita in (1.5) che nel caso delle opzioni di tipo europeo viene effettivamente utilizzata dagli operatori nella gestione del portafoglio che era stato indicato con Π.

Ricordiamo infine che, per utilizzare gli stessi metodi di approssimazione numerica nel caso dei coefficienti σ ed r variabili, è opportuno richiedere che questi ultimi siano derivabili ed abbiano derivata localmente hölderiana.

4 Media aritmetica

Prima di studiare il problema di Cauchy corrispondente al caso della media aritmetica, sserviamo che il cambiamento di variabile $x = \log(S)$ che abbiamo effettuato nel paragrafo precedente trasforma l'equazione differenziale di (2.5) in un'equazione del tipo seguente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{4.1}$$

che presenta delle difficoltà decisamente diverse rispetto alla (3.1). Sappiamo che l'equazione (4.1) conserva molte proprietà di tipo "locale" dell'equazione di Kolmogorov (3.1): ad esempio rientra anch'essa nella classe studiata da Hörmander in [7], e quindi ogni sua soluzione è necessariamente una funzione di classe C^∞. Proprietà di tipo "globale" relative alle soluzioni di (4.1) sono molto più difficili da ottenere, principalmente per il fatto che il coefficiente della derivata $\frac{\partial u}{\partial y}$ cresce esponenzialmente. Per fare riferimento in maniera più diretta a risultati noti, ci è sembrato preferibile lavorare sull'equazione nella forma con cui appare nella (2.5).

Se poniamo

$$u(x,y,t) = x^m e^{qt} V\left(T - \frac{2t}{\sigma^2}, x, \frac{2y}{\sigma^2}\right), \quad m = \frac{r}{\sigma^2}, \; q = m^2 + m,$$

allora l'equazione differenziale (2.5) risulta equivalente alla

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t};$$

di conseguenza il problema di Cauchy (2.5) con dato (2.1) (o (2.2)) diventa

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} & \text{per } (x,y,t) \in \Omega_T, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y) & \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2}$$

dove abbiamo posto $\Omega_T = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times]0, \frac{\sigma^2}{2} T[$ e

$$\varphi(x,y) = x^m \max\left(x - \frac{2|y|}{\sigma^2 T}, 0\right) \tag{4.3}$$

nel caso di (2.1) (siamo interessati a valori positivi di y),

$$\varphi(x,y) = x^m \max\left(\frac{2y}{\sigma^2 T} - E, 0\right) \tag{4.4}$$

nel caso di (2.2).

Enunciamo ora un risultato di esistenza di soluzioni per il problema (4.2). A tal fine faremo uso della nozione di sopra e sottosoluzione. Diremo che u è *soprasoluzione* del problema (4.2) se

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y} \leq \frac{\partial u}{\partial t} & \text{per } (x,y,t) \in \Omega_T, \\ u(x,y,0) \geq \varphi(x,y) & \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.5}$$

e che u è *sottosoluzione* di (4.2) se vale la condizione (4.5) con le due disuguaglianze invertite.

TEOREMA 4.1 *Siano $\varphi \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, $\overline{u}, \underline{u}$ rispettivamente soprasoluzione e sottosoluzione del problema (4.2) e supponiamo che $\underline{u} \leq \overline{u}$ in Ω_T. Allora esiste una soluzione u di (4.2) tale che*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{in } \Omega_T. \tag{4.6}$$

La prova del Teorema sopra enunciato si basa sui risultati di esistenza provati da Manfredini in [10] per il problema di Dirichlet su un aperto *limitato* e su un procedimento diagonale. Osserviamo che per ottenere una soluzione del problema relativo al dato iniziale (4.3), è sufficiente scegliere $\underline{u} \equiv 0$ ed $\overline{u}(x,y,t) = x^{m+1} e^{qt}$, mentre per il problema relativo al dato (4.4), $\underline{u} \equiv 0$ ed $\overline{u}(x,y,t) = \frac{\sigma^2}{2T} e^{kt} x^m \sqrt{x^2+y^2}$, con $k = m^2 + 2m + 2$.

In entrambi i casi risulta $\underline{u}(0,y,t) = \overline{u}(0,y,t) = 0$, quindi abbiamo implicitamente richiesto che $u(0,y,t) = 0$ per ogni y, t; di conseguenza, per il Teorema B di Aronson e Besala [1], u è l'unica soluzione che verifica (4.6).

Nel caso particolare del problema (4.2), l'ipotesi $u(0,y,t) = 0$ non è effettivamente necessaria, come mostrato nel seguente Teorema. Definiamo preliminarmente su $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ la seguente funzione

$$\psi(x,y) = \log\left(x^2 + y^2 + 1\right) - \log(x) \tag{4.7}$$

ed osserviamo che risulta

$$\psi(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to \infty]{} \infty, \quad \psi(x,y) \xrightarrow[(x,y) \to (0,y_0)]{} \infty,$$

per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 4.2 *Sia $u \in C(\overline{\Omega_T})$, tale che $Lu \leq 0$ in Ω_T, che $u(x,y,0) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e supponiamo che esistano due costanti positive M e k tali che risulti*

$$u(x,y,t) \geq -M e^{k\psi^2(x,y)},$$

per ogni $(x,y,t) \in \Omega_T$ (ψ indica la funzione definita in (4.7)). Allora $u \geq 0$ in Ω_T.

Per quanto riguarda i metodi di approssimazione numerica i nostri risultati non sono ancora completi. Osserviamo che la soluzione del problema (4.2) viene ottenuta come limite di una successione di soluzioni di problemi relativi ad aperti *limitati* e quindi è sufficiente approssimare una di queste soluzioni. Di conseguenza è possibile trascurare il comportamento della soluzione "all'infinito" e si possono adattare senza difficoltà i metodi numerici proposti nella nota [13]. Certamente questi risultati non sono ancora molto soddisfacenti, in quanto non forniscono una stima esplicita dell'errore, ma almeno indicano che queste tecniche possono effettivamente fornire una buona approssimazione numerica.

Per concludere, osserviamo che la seguente equazione differenziale stocastica

$$dS = \sigma S^{\varrho} dW + \mu S dt,$$

con $0 \leq \varrho \leq 1$, è stata proposta come modello più realistico per la descrizione dei mercati. In questo contesto l'equazione differenziale che determina il prezzo dell'opzione diventa

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^{2\varrho}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S\frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0;$$

le tecniche indicate in questo paragrafo si adattano senza alcuna difficoltà a questo tipo di problemi, anche nel caso di coefficienti σ, μ ed r dipendenti da t.

Bibliografia

[1] D. G. Aronson, P. Besala, *Uniqueness of positive solution of parabolic equations with unbounded coefficients,* Colloquium Mathematicum **18** (1967), 125–135.

[2] G. Barles, C. Daher, M. Romano, *Convergence of numerical schemes for degenerate parabolic equations arising in finance theory,* Math. Models Methods Appl. Sci. **5** (1995), 125–143.

[3] J. Barraquand, T. Pudet, *Pricing of american path-dependent contingent claims,* Math. Finance **6.1** (1996), 17–52.

[4] F. Black, M. Scholes, *Pricing of options and corporate liabilities,* J. Political Econom. **81** (1973), 637–654.

[5] P. Caverhill, L. Clewlow, *Flexible convolution,* Risk **3** (1990), 25–29.

[6] J. Dewynne, P. Wilmott, *Asian options as linear complementarity problems: analysis and finite-difference solutions,* Advances in Futures and Options Research **8** (1995), 145–173.

[7] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations,* Acta Math. **119** (1967), 147–171.

[8] A. KEMNA, A. VORST, *A pricing method for options based on average asset values,* J. Banking Finan. **14** (1990), 113–129.

[9] E. LANCONELLI, S. POLIDORO, *On a class of hypoelliptic evolution operators,* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **52,1** (1994), 29–63.

[10] M. MANFREDINI, *The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations,* (in corso di stampa su Differential Integral Equations)

[11] S. POLIDORO, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type,* Le Matematiche, **49** (1994), 53–105.

[12] S. POLIDORO, *Uniqueness and representation theorems for solutions of Kolmogorov-Fokker-Planck equations,* Rendiconti di Matematica, VII, **15** (1995), 535–560.

[13] S. POLIDORO, C. MOGAVERO, *A finite difference method for a boundary value problem related to the Kolmogorov equation,* Calcolo **32,3-4** (1995), 193–205.

[14] L. ROGERS, Z. SHI, *The value of an asian option,* J. Appl. Prob. **32** (1995), 1077–1088.

[15] A. RUTTIENS, *Average rate options, classical replica,* Risk **3** (1990), 33–36.

[16] A. N. SHIRYAYEV (ed.), *Selected works of A. N. Kolmogorov, vol II, Probability theory and mathematical statistics,* Kluver Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London (1991).

[17] P. WILMOTT, J. DEWYNNE, S. HOWISON, *Option Pricing: Mathematical Models and Computation.* Oxford Financial Press, Oxford, UK (1993).